

Avaliação de Transformadas Baseadas em Matrizes Ortogonais para Sistemas OFDM

Guilherme Pedro Aquino e Iracema Ariel de Moraes Bonomini,
 Instituto Nacional de Telecomunicações (Inatel), Santa Rita do Sapucaí, Brasil
 E-mails: guilhermeaquino@inatel.br, iracema@inatel.br

Resumo—O objetivo deste artigo é apresentar uma comparação de desempenho entre um conjunto de transformadas baseadas em matrizes ortogonais de modo a responder a seguinte pergunta: há pelo menos uma matriz ortogonal que melhore o desempenho em termos de redução da PAPR e taxa de erro de símbolo no sistema OFDM? No trabalho há a apresentação de um conjunto de cinco matrizes estudadas: Hadamard, Paley-Walsh, Haar, Hadamard complexa e Haar complexa. Os resultados obtidos, para cada matriz, relacionados com a PAPR e taxa de erro de símbolo também são apresentados. O desempenho em termos de taxa de erro de símbolo foi obtido para canais não lineares seletivos em frequência na presença de ruído AWGN.

Index Terms—Matrizes Ortogonais, OFDM, PAPR.

I. INTRODUÇÃO

O acentuado crescimento das redes de telefonia celular e as altas taxas de transmissão de dados em fibra óptica têm demandado novas técnicas para obtenção de um sistema que supra tais necessidades. Dentre essas técnicas destaca-se a multiplexação por divisão em frequências ortogonais (OFDM – *Orthogonal Frequency Division Multiplex*) [1], [2]. Dentro desse cenário, o OFDM destaca-se pela sua eficiência espectral e pela sua robustez frente a canais seletivos em frequência. No entanto, como desvantagens podem ser citadas a vulnerabilidade a erros de sincronismo de fase e frequência, além de alta relação entre a potência de pico e a potência média do sinal (PAPR – *Peak to Average Power Ratio*).

Sinais com elevada PAPR exigem um maior cuidado no processo de amplificação. No intuito de reduzir problemas nessa etapa, existem distintas pesquisas que visam reduzir a PAPR de sinais OFDM [3]. Dentre as várias técnicas de redução da PAPR, destaca-se a técnica que utiliza a transformada de Walsh-Hadamard (WHT – *Walsh-Hadamard Transform*), definida a partir de uma matriz de Walsh-Hadamard, no sistema OFDM. Esta técnica é denominada WHT-OFDM [4]. Além de reduzir a PAPR dos símbolos OFDM, a WHT aumenta a robustez do OFDM frente a canais com desvanecimento seletivo em frequência [5]. Apesar disso, a técnica WHT-OFDM apresenta um pior desempenho em termos da taxa de erro de símbolos (SER – *Symbol Error Rate*) em canais não-lineares, ou seja, os símbolos WHT-OFDM possuem menor robustez ao ceifamento de pico do que os símbolos OFDM convencionais [2].

A matriz de Walsh-Hadamard, usada como referência de comparação neste trabalho, é uma matriz ortogonal que tem se mostrado uma boa ferramenta usada para minimizar a PAPR do sinal OFDM, porém, apresenta um menor desempenho em termos de SER em canais não-lineares. Sendo assim, o objetivo deste trabalho é, portanto, responder, utilizando a ferramenta Matlab R2009a, à seguinte pergunta: dado um conjunto de matrizes ortogonais, existe pelo menos uma que diminua a PAPR e reduza a probabilidade de erro de símbolo frente a canais não-lineares seletivos em frequência na presença de ruído AWGN (*Additive White Gaussian Noise*)? Para responder esta pergunta o trabalho está organizado da seguinte forma: na Seção II há uma breve descrição do sistema OFDM, canais seletivos em frequência e PAPR. Na Seção III são definidas as matrizes utilizadas: Hadamard, Paley e Haar [6]. Na Seção IV são apresentados os desempenhos em termos da PAPR e da SER referentes às transformadas associadas a cada uma das matrizes de modo a compará-los. E por último, a Seção V apresenta as conclusões deste trabalho.

II. PRINCÍPIOS DO SISTEMA OFDM

No sistema OFDM, que é um sistema de multiportadoras ortogonais entre si, a entrada em série de dados é convertida para feixes paralelos e modulados por distintas subportadoras. Isso permite que dados com elevada taxa de transmissão sejam alocados em feixes paralelos (múltiplas portadoras) com taxas de transmissão mais baixas, tornando o símbolo OFDM menos sensível ao desvanecimento do canal [7].

A ortogonalidade entre as subportadoras é garantida quando o espaçamento entre duas portadoras consecutivas é $\Delta_f = f_n - f_m = 1/T_{\text{OFDM}}$, nessa condição pode-se dizer que duas subportadoras subsequentes são ortogonais.

Na prática, o símbolo OFDM é gerado utilizando um bloco para o cálculo da IFFT (*Inverse Fast Fourier Transform*) da informação a ser transmitida, enquanto que no receptor há um bloco para realizar a FFT (*Fast Fourier Transform*). Dessa forma, os símbolos OFDM na transmissão podem ser representados por

$$s[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} c[k] \exp\left(jkn \frac{2\pi}{N}\right), \quad (1)$$

em que $n = 0, 1, \dots, N - 1$ é o índice no domínio do tempo, k é o índice de subportadoras e $c[k] = [c_1, c_2, \dots, c_N]$, com $c_n = i_n + jq_n$, é o vetor de símbolos de dados que, usualmente,

provém de um modulador M -QAM (M -*Quadrature Amplitude Modulation*). Mais detalhes sobre moduladores digitais são encontrados em [7].

A Fig. 1 ilustra um diagrama em blocos de um sistema de transmissão e recepção OFDM. Na recepção, o vetor recebido \mathbf{r} é aplicado ao bloco da FFT, resultando no vetor de símbolos estimados

$$\hat{c}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} r[n] \exp\left(-jkn \frac{2\pi}{N}\right), \quad (2)$$

que são usados pelo demodulador para estimar os bits que foram transmitidos.

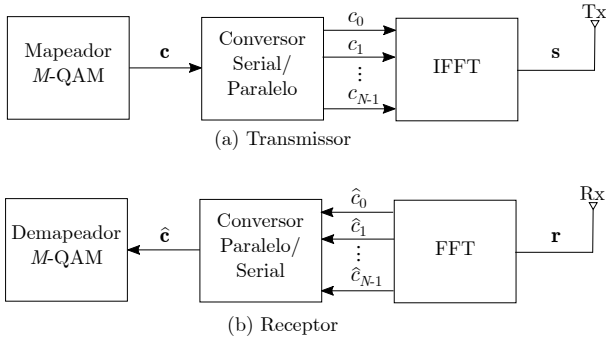


Figura 1. Diagrama em blocos do transmissor e receptor do sistema OFDM.

A. Canal com múltiplos percursos

Na transmissão sem fio, é comum que ocorra a propagação por múltiplos percursos, na qual as ondas de rádio chegam ao receptor com amplitude e fase aleatórias [8]. Um canal com L percursos pode ser modelado por (3), que representa a resposta impulsiva do canal dispersivo,

$$h(t) = \sum_{l=0}^{L-1} \beta_l \delta(t - \tau_l), \quad (3)$$

em que τ_l e β_l são, respectivamente, o atraso e a atenuação provocados pelo l -ésimo percurso. Como o sinal transmitido percorre diversos percursos, no receptor há a chegada de cópias atrasadas do sinal, acarretando na interferência intersimbólica (ISI – *Intersymbol Interference*). A ISI impacta no aumento da taxa de erro de símbolo e é mitigada com o uso do prefixo cíclico [1]. A resposta em frequência desse canal é dada por

$$H(j\omega) = \sum_{l=0}^{L-1} \beta_l \exp(-j\omega\tau_l). \quad (4)$$

Analisando (4), percebe-se que algumas componentes de frequência sofrem mais atenuação que outras, o que conduz à degradação do sinal no domínio da frequência. Esse fenômeno é chamado de seletividade em frequência do canal.

Para que um sinal sujeito a múltiplos percursos não sofra com o desvanecimento seletivo em frequência é necessário que a largura de banda do sinal transmitido seja menor que a banda de coerência do canal, ou seja, $BW_s < BW_c$. No qual BW_c é a banda em que o canal pode ser considerado plano, chamada de banda de coerência [2]. Como o OFDM faz uso

de transmissão de informações de maneira paralela, admitindo um valor de N adequado, pode-se considerar que a largura de banda de cada subportadora do sistema irá ser menor que a BW_c do canal, fazendo com que a recepção dos sinais OFDM seja mais simples e robusta. Entretanto, entre as desvantagens do OFDM destaca-se a elevada PAPR, discutida na próxima subseção.

B. PAPR dos símbolos OFDM

Em função das somas ponderadas em fase dos sinais que compõem cada subportadora do sinal OFDM, a máxima amplitude de um sinal OFDM pode ser muito maior que sua amplitude média [2], caracterizando uma alta relação entre a potência de pico e a potência média do sinal (PAPR). Esses picos de amplitude podem causar a saturação no amplificador de potência resultando no ceifamento da forma de onda e, portanto, aumentando a emissão fora e dentro da banda. A interferência fora da banda pode causar interferência em outros sistemas, enquanto a interferência dentro da banda, aumenta a ICI (*Intra-carrier Interference*) contribuindo com o crescimento da taxa de erro de símbolo do próprio sistema.

A relação entre a potência de pico e a potência média do sinal OFDM \mathbf{s} , descrito em (1), é definida como

$$PAPR(\mathbf{s}) = \frac{\max(|\mathbf{s}|^2)}{E(|\mathbf{s}|^2)}, \quad (5)$$

em que, $|\cdot|$ simboliza o módulo de (\cdot) e o operador E denota o valor esperado (média) do sinal analisado.

Vistos os problemas oriundos da elevada PAPR, há várias pesquisas com o objetivo de reduzi-la [2], [3]. Entre elas destaca-se a utilização da transformada induzida pela matriz de Walsh-Hadamard. Sabe-se que essa é uma matriz ortogonal e, portanto, sugere a investigação de outras matrizes ortogonais que possam melhorar o desempenho do sistema OFDM tanto em termos de redução da PAPR, quanto em termos da redução da SER em canais não-lineares. Portanto, este é o motivo pelo qual surge a questão motivadora deste artigo.

III. MATRIZES ORTOGONAIS

Nas diversas engenharias é comum se deparar com álgebra, em especial a álgebra linear. Para que as notações e termos estejam familiarizados pelo leitor, a primeira parte desta Seção é destinada a definições básicas de álgebra linear [9], [10] e na segunda são apresentadas as matrizes ortogonais usadas neste artigo.

A. Álgebra Linear

Definição 1: Um conjunto não vazio V é um espaço vetorial sobre um corpo K se para os seus elementos, os vetores, forem definidas duas operações $+$ (soma) e \cdot (produto por escalar) que satisfaçam os axiomas abaixo:

- A Cada par $u, v \in V$ corresponde um vetor $u+v \in V$, tal que
- $u + v = v + u, \forall u, v \in V$.
 - $(u + v) + w = u + (v + w), \forall u, v, w \in V$.

- Exista em V um elemento, denominado vetor nulo e denotado por 0 , tal que $0+v = v, \forall v \in V$.
- Para cada vetor $v \in V$, exista $-v$ tal que $v + (-v) = 0$.

M A cada par $\alpha \in K$ e $v \in V$ corresponde um vetor $\alpha \cdot v \in V$ de modo que

- $(\alpha\beta) \cdot v = \alpha(\beta \cdot v), \forall \alpha, \beta \in K$ e $\forall v \in V$.
- $1 \cdot v = v, \forall v \in V$, em que 1 é o elemento identidade de K .

D $\forall \alpha, \beta \in K$ e $\forall u, v \in V$

- $(\alpha + \beta) \cdot v = \alpha \cdot v + \beta \cdot v$.
- $\alpha \cdot (v + u) = \alpha \cdot v + \alpha \cdot u$.

Definição 2: Seja V um espaço vetorial sobre K . Um vetor $v \in V$ é uma combinação linear dos vetores $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ se existirem escalares $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in K$ tais que $v = \alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + \dots + \alpha_n \cdot v_n$.

Seja B um subconjunto de V , diz-se que B gera V se todo elemento de V for uma combinação linear de um número finito de elementos de B .

Definição 3: Um espaço vetorial V sobre um corpo K é dito finitamente gerado se possuir um conjunto gerador finito.

Definição 4: Seja V um espaço vetorial sobre um corpo K . Se V admite uma base finita, então a dimensão de V é definida como o número de elementos desta base. Pode-se mostrar que \mathbb{R}^n , quando visto como um espaço vetorial possui uma base formada de n elementos.

Definição 5: Seja V um espaço vetorial sobre K , em que $K = \mathbb{R}$ (corpo dos números reais) ou $K = \mathbb{C}$ (corpo dos números complexos). Um produto interno sobre V é uma função $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow K$ que satisfaz as seguintes propriedades:

- $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}, \forall u, v \in V$.
- $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle, \forall u, v, w \in V$.
- $\langle \alpha \cdot u, v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle, \forall u, v \in V, \forall \alpha \in K$.
- $\langle u, u \rangle > 0 \forall u \in V$ e $u \neq 0$.

Definição 6: Seja V um espaço vetorial sobre K com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e sejam $u, v \in V$. u e v são ditos ortogonais se $\langle u, v \rangle = 0$. Um subconjunto A de V é chamado ortogonal se os seus elementos são ortogonais dois a dois.

B. Matrizes Ortogonais

Nesta seção são introduzidas algumas matrizes especiais que pertencem ao conjunto das matrizes quadradas, pois para a aplicação proposta neste trabalho dá-se essa exigência [6]. Tais matrizes são denominadas matrizes ortogonais porque ao associar cada uma de suas linhas a um vetor do \mathbb{R}^N (ou \mathbb{C}^N), eles formam uma base ortogonal para \mathbb{R}^N (ou \mathbb{C}^N), admitindo o produto interno usual de \mathbb{R}^N (ou \mathbb{C}^N). A convenção aqui adotada é de que $M_{N \times N}$, ou apenas M_N , representa o conjunto das matrizes quadradas de ordem N . Seja $A \in M_N$ e cada elemento de A , denotado por $a_{i,j}$, com $i = 1, 2, \dots, N$ (linhas) e $j = 1, 2, \dots, N$ (colunas), A é dita

uma matriz a valores reais se $a_{i,j} \in \mathbb{R}$ e a valores complexos se $a_{i,j} \in \mathbb{C}$. A matriz A pode ser representada por $[a_{ij}]$. A matriz $I \in M_N$ é denominada de matriz identidade de ordem N . A matriz $A^{-1} \in M_N$ é chamada de matriz inversa de A e satisfaz $AA^{-1} = I_{N \times N} = I_N = I$. A notação $A^T = [a_{ji}]$ é reservada para a transposta de A . Já $A^* = [a_{ji}^*]$ representa a matriz transposta conjugada de A .

C. Matrizes de Hadamard

Em 1867, James Joseph Sylvester em seu artigo, *Thoughts on inverse orthogonal matrices simultaneous sign-successions and tessellated pavements in two or more colors with applications to Newton's rule, ornamental tile work and the theory of numbers*, propôs a construção recursiva de matrizes especiais dada por

$$H_{2^n} = \begin{bmatrix} H_{2^{n-1}} & H_{2^{n-1}} \\ H_{2^{n-1}} & -H_{2^{n-1}} \end{bmatrix}, \quad (6)$$

em que $n = 1, 2, 3, \dots$ e para $n = 0$, $H_1 = [1]$. Atualmente essas matrizes são chamadas de matrizes de Walsh-Hadamard ou apenas Hadamard. No entanto, historicamente, Jacques Hadamard conjecturou em 1893 que para todo inteiro m divisível por quatro existia uma matriz de Hadamard de ordem m . Esta conjectura permanece em aberto. A recursão (6) motiva a definição das matrizes de Hadamard (real e complexa):

Definição 7: Uma matriz quadrada H_N de ordem N composta pelos elementos -1 e $+1$ é denominada matriz de Hadamard se a seguinte condição é verdadeira

$$H_N H_N^T = H_N^T H_N = N I_N. \quad (7)$$

Exemplo 1: A matriz de Hadamard com $N = 8$ é apresentada a seguir

$$H_8 = \begin{bmatrix} +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 \\ +1 & -1 & +1 & -1 & +1 & -1 & +1 & -1 \\ +1 & +1 & -1 & -1 & +1 & +1 & -1 & -1 \\ +1 & -1 & -1 & +1 & +1 & -1 & -1 & +1 \\ +1 & +1 & +1 & +1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ +1 & -1 & +1 & -1 & -1 & +1 & -1 & +1 \\ +1 & +1 & -1 & -1 & -1 & -1 & +1 & +1 \\ +1 & -1 & -1 & +1 & -1 & +1 & +1 & -1 \end{bmatrix}$$

Pode-se também definir a matriz de Hadamard complexa.

Definição 8: Uma matriz complexa de Hadamard é uma matriz C de ordem N composta somente pelos elementos $\{\pm 1, \pm j\}$ que satisfaz $CC^* = N I_N$, em que C^* é a matriz complexa conjugada transposta de C .

A relação de recorrência a seguir gera matrizes complexas de Hadamard

$$[WH]_{2^m}^C = \begin{bmatrix} [WH]_{2^{m-1}}^C & [WH]_1^C \otimes [WH]_{2^{m-2}}^C \\ [WH]_{2^{m-1}}^C & -[WH]_1^C \otimes [WH]_{2^{m-2}}^C \end{bmatrix} \quad (8)$$

em que $m = 3, 4, 5, \dots$, e

$$[WH]_2^C = \begin{bmatrix} +1 & +1 \\ +j & -j \end{bmatrix}, \quad (9)$$

$$[\text{WH}]_4^C = \begin{bmatrix} +1 & +1 & +1 & +1 \\ +1 & +1 & +j & -j \\ +1 & +1 & -1 & -1 \\ +1 & -1 & +j & -j \end{bmatrix}, \quad (10)$$

o operador \otimes é o produto de Kronecker ou produto tensorial, definido a seguir.

Definição 9: Sejam $A \in M_{M \times N}$ e $B \in M_{P \times Q}$. O produto de Kronecker de A e B é uma matriz $C \in M_{MP \times NQ}$ definida por

$$C = A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Exemplo 2: Segue o exemplo de uma matriz de Hadamard Complexa de ordem 8, usando a relação de recursão (8)

$$H_8 = \begin{bmatrix} +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 \\ +1 & +1 & -1 & -1 & -j & -j & +j & +j \\ +1 & +1 & +1 & +1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ +1 & +1 & -1 & -1 & +j & +j & -j & -j \\ +j & -j & -j & +j & +j & -j & -j & +j \\ +j & -j & +j & -j & +1 & -1 & +1 & -1 \\ +j & -j & -j & +j & -j & +j & +j & -j \\ +j & -j & +j & -j & -1 & +1 & -1 & +1 \end{bmatrix}$$

D. Matrizes de Paley-Walsh

Em 1923, Walsh introduziu uma construção recursiva para os sistemas Paley-Walsh ou apenas Paley, dada por

$$P_N = \begin{bmatrix} P_{N/2} \otimes [+1 & +1] \\ P_{N/2} \otimes [+1 & -1] \end{bmatrix}, \quad (12)$$

em que $P_1 = [1]$, $N = 2^n$, $n = 1, 2, 3, \dots$, e \otimes é o produto de Kronecker.

Exemplo 3: A matriz de Paley com $N = 8$ é apresentada neste exemplo.

$$P_8 = \begin{bmatrix} +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 \\ +1 & +1 & +1 & +1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ +1 & +1 & -1 & -1 & +1 & +1 & -1 & -1 \\ +1 & +1 & -1 & -1 & -1 & -1 & +1 & +1 \\ +1 & -1 & +1 & -1 & +1 & -1 & +1 & -1 \\ +1 & -1 & +1 & -1 & -1 & +1 & -1 & +1 \\ +1 & -1 & -1 & +1 & +1 & -1 & -1 & +1 \\ +1 & -1 & -1 & +1 & -1 & +1 & +1 & -1 \end{bmatrix}$$

E. Matrizes de Haar

O matemático húngaro Alfred Haar introduziu em 1910 a transformada de Haar induzida por uma matriz real. No entanto, ela também pode ser complexa.

Ao passo que nas transformadas discretas de Fourier (DFT) e de Walsh-Hadamard (WHT), cada coeficiente é uma combinação linear de todas as coordenadas de um vetor do

espaço original, na transformada de Haar isso só é válido para os dois primeiros coeficientes.

Para a matriz de Haar real, a transformada provê uma diferenciação na concentração de energia do sinal. Esta propriedade é útil para processamento digital de imagens. A equação de recursão da matriz de Haar real é expressa em (13), enquanto que para valores complexos é expressa em (14)

$$[\text{Ha}]_{2^n} = \begin{bmatrix} [\text{Ha}]_{2^{n-1}} \otimes [+1 & +1] \\ \sqrt{2^{n-1}} I_{2^{n-1}} \otimes [+1 & -1] \end{bmatrix}, \quad (13)$$

$$[\text{Ha}]_{2^n}^C = \begin{bmatrix} [\text{Ha}]_{2^{n-1}}^C \otimes [+1 & -j] \\ \sqrt{2^{n-1}} I_{2^{n-1}} \otimes [+1 & +j] \end{bmatrix}, \quad (14)$$

em que $[\text{Ha}]_2 = [\text{Ha}]_2^C = \begin{bmatrix} +1 & +1 \\ +1 & -1 \end{bmatrix}$, $n = 2, 3, \dots$.

Exemplo 4: A matriz de Haar com $N = 8$ é apresentada neste exemplo.

$$[\text{Ha}]_8 = \begin{bmatrix} +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 \\ +1 & +1 & +1 & +1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ +2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & +2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +2 & -2 \end{bmatrix}$$

Exemplo 5: A matriz de Haar complexa com $N = 8$ é apresentada a seguir.

$$[\text{Ha}]_8^C = \begin{bmatrix} +1 & -j & -j & -1 & +1 & -j & -j & -1 \\ +1 & -j & -j & -1 & -1 & +j & +j & +1 \\ \sqrt{2} & -\alpha & +\alpha & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & -\alpha & +\alpha & \sqrt{2} \\ +2 & +2j & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +2 & +2j & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & +2 & +2j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +2 & +2j \end{bmatrix}$$

em que $\alpha = \sqrt{2}j$.

F. Transformadas utilizando matrizes ortogonais

Embora o termo ‘transformada’ tenha sido citado e haja uma intuição para a sua definição, é fundamental que esse conceito seja formalizado. Seja Ξ o conjunto formado pelas matrizes de ordem N : Hadamard, Hadamard complexa, Paley-Walsh, Haar e Haar complexa. Assim, dado $\Lambda \in \Xi$, a transformada associada a matriz Λ é o produto de Λ por um vetor $\mathbf{x} \in K^N$, em que K pode ser o corpo dos números reais, \mathbb{R} ou o corpo dos números complexos, \mathbb{C} . Logo,

$$\mathbf{y} = \frac{1}{\sqrt{N}} \Lambda_N \mathbf{x} \quad (15)$$

em que $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in K^N$. Como a aplicação é feita a um vetor, ela é dita uma transformada unidimensional. A transformada inversa é dada por

$$\mathbf{x} = \frac{1}{\sqrt{N}} \Lambda_N^{-1} \mathbf{y} \quad (16)$$

em que $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in K^N$, para as matrizes com coeficientes reais. Já para aquelas com valores complexos, tem-se

$$\mathbf{x} = \frac{1}{\sqrt{N}} \Lambda_N^* \mathbf{y} \quad (17)$$

em que $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in K^N$.

É interessante notar que na transformada de Walsh-Hadamard ($\Lambda_N = H_N$) o vetor \mathbf{y} é composto de uma combinação linear de todos os símbolos do vetor de dados \mathbf{x} . Essa característica é especialmente interessante para o sistema WHT-OFDM, pois, cada subportadora do sistema transmite essa combinação linear, o que significa que caso uma dada subportadora sofra um desvanecimento severo, as informações disponíveis nas demais subportadoras podem ser suficiente para recuperar todos os dados, sem perda significativa de informação. Assim, obtém-se um ganho de desempenho em termos de SER em canais lineares seletivos em frequência em função dessa diversidade no domínio da frequência. Porém, para canais não-lineares, um ceifamento de pico, causado pela saturação do amplificador, implica em erros em todas as componentes de informação do sinal, aumentando o patamar de erro de símbolos da técnica WHT-OFDM. Portanto, conclui-se que a transformada que utiliza a matriz de Hadamard é uma boa opção somente para canais lineares [2]. Sendo assim, a investigação proposta neste artigo visa encontrar outra matriz ortogonal que mantenha as características da matriz de Hadamard, porém, sem degradar o desempenho para canais não-lineares.

IV. SIMULAÇÕES E RESULTADOS

Neste item são apresentados os resultados das simulações do sistema OFDM usando as transformadas induzidas pelas matrizes definidas na Seção III.

A. Características das simulações

Seja Λ_N uma matriz ortogonal de ordem N . Ao aplicar a transformada definida por Λ_N no vetor de N símbolos complexos, $\mathbf{c}^T = [c_1, c_2, \dots, c_N]$, oriundos de um modulador M -QAM, o vetor de dados que será utilizado na geração do símbolo OFDM passa a ser

$$\mathbf{c}_w = \frac{1}{\sqrt{N}} \Lambda_N \mathbf{c}. \quad (18)$$

Logo em seguida, a IFFT é aplicada ao vetor \mathbf{c}_w resultando no símbolo OFDM de transmissão definido por

$$\mathbf{s}_w = \mathbf{F}_N^H \mathbf{c}_w = \frac{1}{\sqrt{N}} \mathbf{F}_N^H \Lambda_N \mathbf{c}, \quad (19)$$

em que \mathbf{F}_N é a matriz da transformada de Fourier discreta, o símbolo $(\cdot)^H$ é o operador Hermitiano.

No receptor, a FFT é aplicada ao vetor de dados recebido \mathbf{r}_w , que é o vetor correspondente à versão corrompida do vetor transmitido \mathbf{s}_w . Na saída da FFT tem-se o vetor $\hat{\mathbf{c}}_w$ que apresenta os coeficientes do sinal WHT recebido. O vetor de símbolos estimados no receptor é obtido aplicando a transformada inversa de Walsh-Hadamard, e é dado por

$$\hat{\mathbf{c}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \mathbf{F}_N \Lambda_N^{-1} \mathbf{r}_w. \quad (20)$$

Os diagramas em blocos do transmissor e receptor do sistema OFDM com transformadas ortogonais, implementados nas simulações, são ilustrados na Fig. 2.

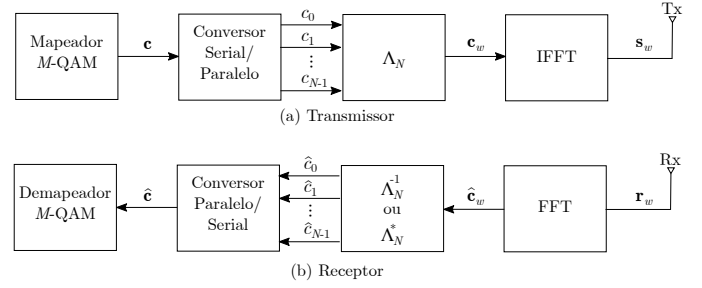


Figura 2. Diagramas em blocos do transmissor e receptor OFDM com transformada induzida por matrizes ortogonais.

Os parâmetros utilizados nas simulações são listados na Tabela I, em que σ_s é o desvio padrão da parte real do símbolo OFDM convencional.

Tabela I
PARÂMETROS USADOS NAS SIMULAÇÕES

Parâmetro	Valor
Modulação	16-QAM
Número de subportadoras	$N = 2048$
Limiar de ceifamento	$2\sigma_s$

B. Caracterização do canal de comunicação

O canal não-linear utilizado nas simulações desse artigo é ilustrado na Fig. 3. Trata-se da função transferência de potência (PTF – *Power Transfer Function*) do amplificador de potência de um sistema de transmissão.

A PTF de um amplificador real é dividida em região linear e não-linear. Basicamente, a região não-linear dos amplificadores de potência é definida pela região de saturação dos mesmos. É comum em projetos, os amplificadores operarem próximo à saturação, pois dessa forma garante-se maior eficiência energética dos mesmos. No entanto, se esse critério for adotado em sistemas OFDM, os picos desse sinal podem conduzir o amplificador para a região de não-linearidade. Caso isso ocorra, esses picos serão ceifados, imprimindo distorções não-lineares que podem causar erros de recepção.

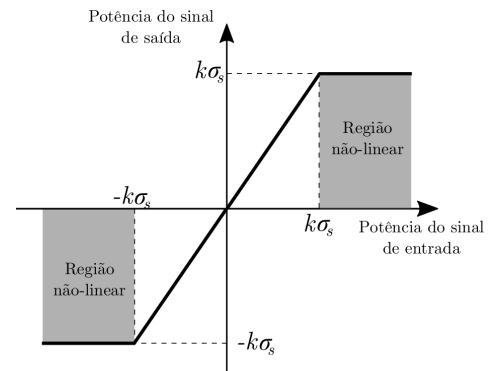


Figura 3. PTF do amplificador de potência não-linear usado nas simulações.

A PTF do canal não-linear implementado nas simulações é baseada no amplificador de potência de estado sólido (SSPA – *Solid State Power Amplifier*) descrita por [11].

$$G[|x(t)|] = \frac{g_0|x(t)|}{\left[1 + \left(\frac{g_0|x(t)|}{x_{sat}}\right)^{2p}\right]^{\frac{1}{2p}}}, \quad (21)$$

em que $x(t)$ é o sinal de entrada, g_0 é o ganho do amplificador e p é o parâmetro de suavidade da curva de amplificação. A PTF mostrada na Fig. 3 possui $p \rightarrow \infty$, que faz com que haja um ceifamento abrupto das amostras de sinal que ultrapassam o limiar $k\sigma_s$.

Como apresentado na Seção II, os canais de comunicação podem apresentar seletividade em frequência devido à propagação por múltiplos percursos. Os canais seletivos em frequência utilizados nas simulações deste artigo foram Brasil C e Brasil E, cujos principais parâmetros são descritos na Tabela II. Admite-se ainda a presença de ruído AWGN na recepção. Portanto, os canais utilizados nas simulações para avaliação da taxa de erro de símbolo são denominados canais não-lineares seletivos em frequência na presença de ruído AWGN.

Tabela II
PERFIL DE ATRASOS DOS CANAIS BRASIL C E E.

	Brasil C		Brasil E	
	Atraso (μs)	Atenuação [dB]	Atraso (μs)	Atenuação [dB]
Percurso 1	0	2,8	0	0
Percurso 2	0,089	0	1	0
Percurso 3	0,419	3,8	2	0
Percurso 4	1,506	0,1	–	–
Percurso 5	2,322	2,5	–	–
Percurso 6	2,799	1,3	–	–

C. Desempenho em termos de redução da PAPR

Entre as ferramentas utilizadas para caracterização da estatística da PAPR de um sinal está a função de distribuição cumulativa complementar (CCDF – *Complementary Cumulative Distribution Function*) [3]. Neste artigo, a comparação entre as diferentes matrizes ortogonais, referente à redução da PAPR, é feita a partir da CCDF da PAPR do sinal de transmissão (s_e ou s_w). A Fig. 4 ilustra os resultados obtidos por meio de simulação computacional para os valores de PAPR das diversas matrizes analisadas neste trabalho. A CCDF de cada matriz mostra a probabilidade da PAPR de um símbolo ser maior que um dado valor x . As CCDFs foram levantadas usando um vetor com 10^6 valores instantâneos de PAPR para cada matriz analisada.

Observa-se que a probabilidade de um símbolo OFDM apresentar uma $PAPR(s) > 10$ é de aproximadamente $8 \cdot 10^{-2}$. Ou seja, a potência de pico de um sinal OFDM será 10 vezes maior que sua potência média para 8% dos símbolos transmitidos. Quando a transformada de Walsh-Hadamard é utilizada, esta probabilidade cai para aproximadamente $4 \cdot 10^{-2}$. A matriz de Paley produz a mesma redução de PAPR que a matriz de Hadamard. A matriz de Hadamard complexa reduz a PAPR dos sinais OFDM, porém, não é tão eficiente quanto à matriz

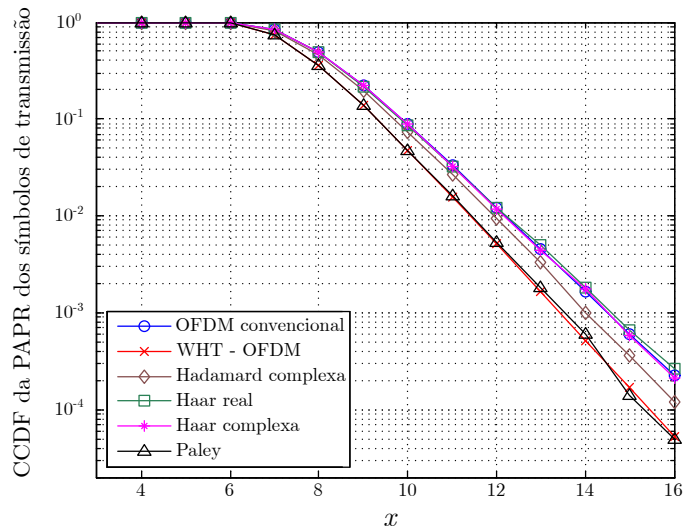


Figura 4. Probabilidade da PAPR ser maior que um dado limiar x . Análise para várias matrizes ortogonais.

de Hadamard real e a matriz de Paley. As matrizes de Haar, real e complexa, não produziram uma redução da PAPR dos sinais OFDM.

Conclui-se que, em termos de redução da PAPR, a utilização das matrizes de Haar não é interessante, pois, aumentam a complexidade do transmissor e receptor e não apresentam ganho com relação à eficiência do amplificador de potência. As transformadas utilizando matrizes de Paley e Hadamard (real ou complexa) apresentam significativa redução de PAPR se comparadas com o OFDM convencional. Portanto, podem aumentar a eficiência de utilização do amplificador de potência, com o custo de uma maior complexidade dos transmissores e receptores.

Além da redução da PAPR, deve-se investigar o desempenho, em termos de SER, das transformadas quando o canal apresenta não-linearidades e seletividade em frequência.

D. Desempenhos em termos de SER

De maneira geral, as curvas de desempenho ilustradas nas Fig. 5 e 6 mostram que a taxa de erro de símbolos tende a diminuir quando aumenta-se a relação sinal-ruído definida pela relação E_s/N_0 . Porém, a partir de um determinado valor, a SER se mantém constante mesmo aumentando E_s/N_0 . Isto acontece devido ao erro imprimido pelo ceifamento de pico, que acontece no amplificador de potência. A partir desse ponto o efeito da não-linearidade do canal é maior que o efeito da seletividade em frequência do canal, fazendo com que apareça o patamar de erro de símbolos.

Para o canal Brasil C, o sistema OFDM convencional apresenta um patamar de erro de aproximadamente $6 \cdot 10^{-5}$ a partir de uma relação sinal-ruído de 40 dB. A técnica WHT-OFDM apresenta um patamar de erro de símbolos muito maior que o OFDM convencional, próximo a $4 \cdot 10^{-3}$.

O pior desempenho do WHT-OFDM em canais não-lineares pode ser explicado levando em conta o processo da transformada descrito por (15). Pode-se notar que transformada induzida pela matriz de Hadamard gera um sinal em que

cada posição do vetor de saída y é composto por uma combinação linear de todos os componentes do vetor de entrada x [2]. Quando há um ceifamento em uma amostra do sinal de transmissão, o erro de estimação no receptor será propagado para todos os símbolos que geraram o sinal de transmissão (devido essa combinação linear), aumentando portanto o patamar de erro de símbolos do sistema. Note que a transformada utilizando a matriz de Paley também gera um vetor de transmissão com cada componente formada por uma combinação linear, mesmo que diferente, de todos os símbolos da fonte de dados. Portanto, isso explica o mesmo desempenho em termos de SER para as matrizes de Hadamard real e Paley. Dessa forma, conclui-se que mesmo reduzindo a PAPR, o uso das dessas duas matrizes não é indicado para canais com ceifamento de pico. Conclui-se também que nestes dois casos, o aumento da complexidade dos transmissores e receptores não são justificados.

Já as matrizes de Haar reduzem o patamar de erro de símbolos se comparadas com as matrizes de Hadamard real e Paley, porém, estes patamares ainda ficaram acima do OFDM convencional. Nas transformadas induzidas pelas matrizes de Haar, somente os dois primeiros coeficientes do vetor de saída y é composto por uma combinação linear de todos os símbolos de entrada. Os demais coeficientes do vetor de saída não são compostos por todos os símbolos de entrada. Portanto, o erro provocado pelo ceifamento dos picos dos sinais não são refletidos em todos os símbolos do sinal como acontece para as matrizes de Hadamard real e Paley. O fato de incluir componentes complexas nas matrizes de Haar aumenta a robustez do sistema frente aos ceifamentos de pico. Esta melhor robustez se traduz em um menor patamar de erro de símbolos quando utiliza-se a matriz de Haar complexa ao invés da matriz de Haar real.

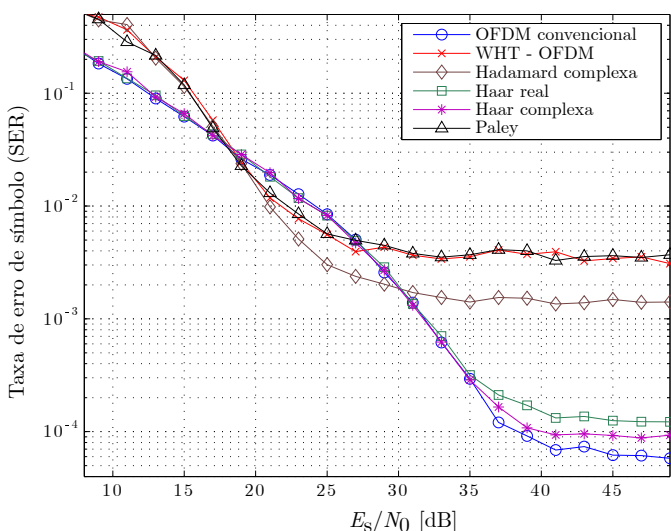


Figura 5. Probabilidade de erro de símbolo – Canal Brasil C.

Da mesma forma que na matriz de Haar complexa, a matriz de Hadamard complexa consegue diminuir o patamar de erro de símbolos se comparada com a matriz de Hadamard real. Além disso, ela conserva as propriedades da WHT real na região da curva na qual a seletividade em frequência é mais

prejudicial que a não-linearidade. Ou seja, para valores de relação sinal-ruído $20\text{dB} < E_s/N_0 < 30\text{dB}$ existe uma vantagem para a matriz de Hadamard complexa comparada com todos os outros sistemas analisados. Porém, os valores de SER se mantêm acima de 10^{-3} no qual, para muitos sistemas, é uma taxa de erro de símbolo acima do tolerável. Além disso, o patamar de erro se mantêm em valores de aproximadamente $2 \cdot 10^{-3}$, maior que o OFDM e matrizes de Haar.

O canal Brasil E é mais seletivo em frequência que o canal Brasil C. Sendo assim, o desempenho de todos os sistemas analisados irão degradar substancialmente, em outras palavras, para manter o mesmo desempenho em termos de SER, é necessário um grande incremento na relação E_s/N_0 dos sistemas, no qual esse incremento é da ordem de 15 dB. Por este fato, o efeito das transformadas nos símbolos OFDM pode apresentar vantagens consideráveis na região em que a seletividade em frequência é mais prejudicial que o efeito da não-linearidade, ou seja, antes da região de patamar de erro de símbolos. Basicamente, todas as observações feitas para o canal Brasil C também podem ser feitas para o canal Brasil E, com algumas ressalvas quanto aos valores numéricos. No entanto, é observada uma característica especialmente importante para as matrizes de Haar.

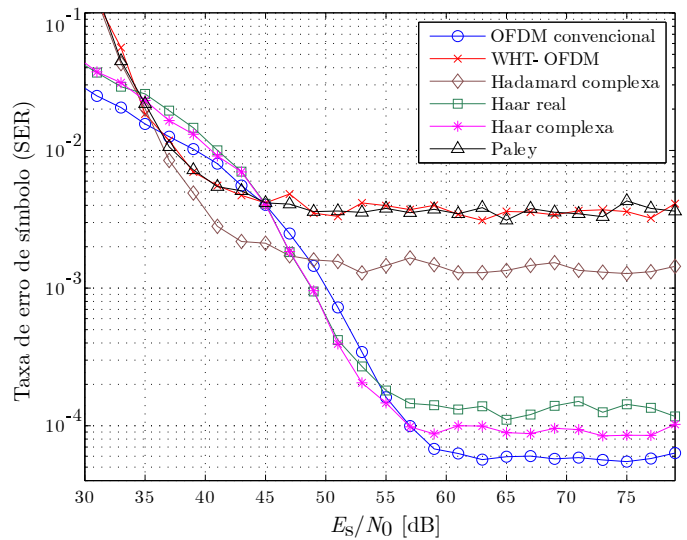


Figura 6. Probabilidade de erro de símbolo – Canal Brasil E.

Observe que na região da curva na qual a relação sinal-ruído é $45\text{dB} < E_s/N_0 < 55\text{dB}$, o desempenho dos sistemas que utilizam as matrizes de Haar, real e complexa, é superior a todos os outros sistemas analisados. O ganho de desempenho é da ordem de 3 dB nesta região se comparado ao desempenho do sistema OFDM convencional. Portanto, conclui-se que, para o canal Brasil E, a maior complexidade inserida pelas transformadas de Haar na transmissão e recepção é justificada pelo ganho de desempenho na região indicada. A matriz de Haar complexa leva vantagem sobre a matriz de Haar real por ser menos susceptível ao ceifamento de pico e, portanto, apresenta um menor patamar de erro de símbolo. A complexidade das transformadas induzidas pelas matrizes real e complexa de Haar são iguais, fazendo com que haja uma escolha natural pela matriz complexa de Haar.

Apesar do sistema OFDM apresentar menor patamar de erro de símbolo, o resultado encontrado ainda é interessante para a matriz de Haar complexa, abrindo possibilidades de investigar alguma modificação usando a Haar complexa para diminuir o patamar de erro e manter suas características em canais seletivos em frequência. Como exemplo, pode-se citar a dupla transformada, que já foi testada com êxito para a matriz de Hadamard real [12] e, poderia trazer melhorias para a matriz de Haar complexa. Outras possibilidades incluem o SLM-WHT usando a matriz de Haar complexa [13] e o SLM-DWHT também usando a matriz de Haar complexa [14].

V. CONCLUSÕES

Neste trabalho foi apresentado um conjunto de cinco matrizes, que combinadas ao OFDM foram candidatas a tornar o sistema mais robusto, diminuindo a SER e/ou a PAPR se comparadas ao OFDM convencional.

As matrizes ortogonais denominadas Hadamard, Paley e Hadamard complexa apresentaram redução na PAPR dos símbolos OFDM, sendo que os maiores ganhos foram conseguidos com as matrizes de Hadamard real e Paley. As matrizes de Haar não reduziram a PAPR dos sinais OFDM.

Com relação ao desempenho dos sistemas em canais não-lineares e seletivos em frequência, foi verificado que a WHT não é indicada quando o canal apresenta ceifamento de pico, juntamente com a transformada induzida pela matriz de Paley. A matriz de Hadamard complexa diminui substancialmente o patamar de erro atingido pela matriz de Hadamard real, porém, o patamar de erro atingido ainda é alto se comparado ao desempenho do OFDM convencional. Para o canal Brasil C, o desempenho das matrizes de Haar foi aproximadamente igual ao desempenho do OFDM convencional, com vantagens para o OFDM. No canal Brasil E, no qual a seletividade em frequência é maior, as matrizes de Haar se destacam do OFDM convencional na região da curva na qual o efeito da não-linearidade é menos crítico, porém, ainda apresentaram patamares de erros acima do OFDM.

As investigações feitas neste trabalho indicaram que, em alguns casos, as matrizes de Haar podem superar o desempenho de sistemas já conhecidos, como OFDM e WHT-OFDM, abrindo novas possibilidades de uma investigação usando técnicas mais recentes como o SLM-WHT, DWHT e SLM-DWHT, porém, substituindo a matriz de Hadamard pelas matrizes de Haar, principalmente a matriz complexa.

AGRADECIMENTOS

Este trabalho foi parcialmente financiado pela Finep / Funtel Grant No. 01.14.0231.00, sob o Centro de Referência de Radiocomunicações (CRR), projeto do Instituto Nacional de Telecomunicações (Inatel), Brasil.

REFERÊNCIAS

- [1] A Bahai, *Multi-carrier digital communications: theory and applications of OFDM*, 2nd ed. New York: Springer, 2004.
- [2] G. P. Aquino, "Comparação entre técnicas de redução da PAPR em sinais OFDM," Dissertação de Mestrado, Instituto Nacional de Telecomunicações - Inatel, Santa Rita do Sapucaí, 2011.

- [3] Y. Rahmatallah e S. Mohan, "Peak-To-Average Power Ratio Reduction in OFDM Systems: A Survey And Taxonomy," *IEEE Commun. Surv. Tutor.*, vol. 15, no. 4, pp. 1567-1592, 2013.
- [4] Z. Dlugaszewski e K. Wesolowski, "WHT/OFDM-an improved OFDM transmission method for selective fading channels," in *Proc. Symposium on Communications and Vehicular Technology*, 2000, vol. 19, pp. 144-149.
- [5] L. Mendes e R. Baldini Filho, "Performance of WHT-STC-OFDM in Mobile Frequency Selective Channel," in *Proc. ITS 2010*, 2010.
- [6] S. S. Aгаian e SPIE (Society), *Hadamard transforms*. Bellingham, Wash.: SPIE Press, 2011.
- [7] D. A. Guimarães, *Digital Transmission, A simulation-aided introduction with Vissin/Comm*, 1st ed. Springer, 2009.
- [8] G. P. Aquino e L. L. Mendes, "Comparação entre técnicas de redução da PAPR em sinais OFDM," in *Proc. XXIX Simpósio Brasileiro de Telecomunicações - SBrT 2011*, Curitiba, 2011.
- [9] F. U. Coelho e M. L. Lourenço, *Um curso de álgebra linear*, 2nd ed. São Paulo: Edusp, 2010.
- [10] S. Lang, *Álgebra linear*, 1st ed. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2003.
- [11] C. Rapp, "Effects of the HPA-nonlinearity on a 4-DPSK/OFDM signal for a digital sound broadcasting system," in *Proc. 2nd European Conference on Satellite Communications (ECSC)*, Liège, Belgium, October 1991, pp. 179-184.
- [12] G. P. Aquino, L. L. Mendes, e L. Resende, "(Invited Paper) Double Walsh-Hadamard Transform OFDM System.," *Especial Edition of Revista Telecomunicações*, 2013.
- [13] G. P. Aquino, L. L. Mendes, e L. S. Resende, "Melhoria da técnica de redução da PAPR baseada na transformada de Walsh-Hadamard.," in *Proc. XXX Simpósio Brasileiro de Telecomunicações - SBrT 2012*, Brasília, 2012.
- [14] G. P. Aquino, L. L. Mendes, e T. C. Pimenta, "Esquema para Redução de PAPR em Sistemas OFDM empregando as Técnicas SLM e Double WHT," in *Proc. XXXI Simpósio Brasileiro de Telecomunicações - SBrT 2013*, Fortaleza, 2013.